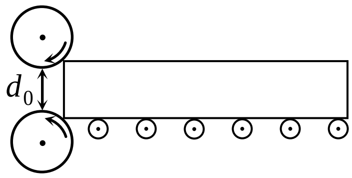
Задание отборочного тура

Инженерной олимпиады школьников 2013-2014 учебного года

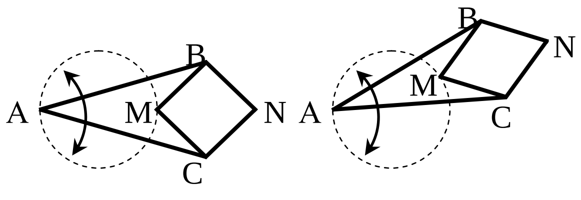
1. Если терморегулятор утюга поставить в положение «капрон», его нагреватель периодически включается на 10 с и периодически выключается на 40 с. Поверхность утюга при этом нагревается до $100°$ С (и слабо меняется при включении-выключении нагревателя из-за инерционности теплопередачи). Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то нагреватель будет включаться на 20 с и выключаться на 30 с. Определить установившуюся температуру поверхности утюга в этом положении. Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур поверхности утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате $20°$ С.

2. Для измерения отношения теплоемкостей газа при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_V провели такой эксперимент. Газу, имеющему начальные объем и давление V_0 и p_0, сообщили некоторое количество теплоты, поддерживая постоянным его давление. При этом его объем вырос до значения $2V_0$. Затем газ вернули в начальное состояние и сообщили ему то же количество теплоты, но в процессе при постоянном объеме, при этом его давление выросло до значения p_1. Найти по этим данным отношение теплоемкостей c_p / c_V.

3. На прокатном стане заготовка, двигаясь по направляющим, подается к валкам, которые втягивают ее. При каком минимальном коэффициенте трения валки будут втягивать заготовку, если радиус валков R, расстояние между ними d_0, толщина заготовки d ($d > d_0$)? Заготовку не подталкивают. Благодаря каким силам происходит «прокатывание» заготовки между валками прокатного стана?



4. Для преобразования одного типа движения в другое (например, вращательного в колебательное, движение по прямой или s-образное) во многих инженерных системах используют разнообразные шарнирные соединения и механизмы. Рассмотрите шарнирный механизм, изображенный на рисунке. Две направляющие одинаковой длины AB и AC скреплены между собой в т. A. К концам направляющих прикреплен ромб BMCN; соединения всех звеньев механизма - шарнирные. Механизм совершает вращение вокруг т. A, при этом точка M движется по окружности (поэтому ромб BMCN при вращениях механизма «сжимается»). По какой линии будет двигаться точка N? Ответ обосновать.



5. Как направлена сила трения, действующая на ведущие колеса автомобиля, при (а) разгоне, (б) торможении, (в) повороте. Равна ли эта сила своему максимальному значению μN (μ - коэффициент трения, N - сила реакции полотна дороги), и если да, то в каких ситуациях? А в каких ситуациях нет? Хорошо это, или плохо, если сила трения достигает своего максимального значения? Почему? Какой автомобиль может развивать на дороге бо́льшую мощность – передне- или заднеприводный – при одинаковой мощности мотора и почему?

6. Чтобы уничтожить искусственный спутник Земли, движущийся с выключенным двигателем по круговой орбите на высоте 100 км, величину его скорости быстро уменьшают на 1 %. В пренебрежении силой сопротивления воздуха оцените, какое расстояние пролетит спутник от точки, в которой его скорость уменьшилась, до точки падения на поверхность Земли. Значения всех необходимых для оценки величин выберите сами, исходя из своих знаний, опыта и здравого смысла. Могут понадобиться следующие величины: масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли $6,4 \cdot 10^{3}$ км, гравитационная постоянная $6,7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг с^2).

Решения

1. Пусть мощность нагревателя утюга P. Тогда, поскольку теплоотдача пропорциональна разности температур, и для положения регулятора «капрон» справедливо следующее соотношение энергетического баланса:

$$P\cdot 10(\text{сек}) = k(100(°C) - 20(°C))50(\text{сек}) = k4000(\text{град}\cdot\text{сек})$$

где k - коэффициент пропорциональности между мощностью теплопотерь и разностью температур утюга и окружающей среды. Отсюда находим

$$\frac{P}{k} = 400\ (\text{град}) \qquad (1)$$

Для положения «хлопок» уравнение теплового баланса имеет вид

$$P\cdot 20(\text{сек}) = k(t(°\text{C}) - 20(°\text{C}))50(\text{сек})$$

Где t - искомая температура утюга. Подставляя сюда соотношение мощности нагревателя и теплопотерь (1), получим

$$t = 180°\ \text{C}$$

2. Из закона Клапейрона-Менделеева имеем для процессов при постоянном давлении

$$Q = c_p\Delta T = c_p\frac{p_0\Delta V}{\nu R} = c_p\frac{p_0V_0}{\nu R} \qquad (1)$$

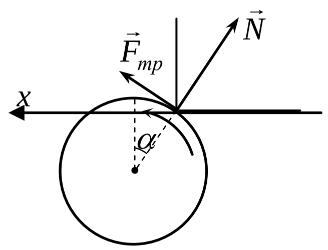
и при постоянном объеме

$$Q = c_V\Delta T = \frac{c_V\Delta pV_0}{\nu R} = \frac{c_V(p_1 - p_0)V_0}{\nu R} \qquad (2)$$

Деля формулы (1) и (2) друг на друга, получим

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_0)}{p_0}$$

3. В момент касания валков на заготовку действуют: силы нормальной реакции и силы трения со стороны валков (силой тяжести, действующей на заготовку, пренебрегаем по сравнению с этими силами). Заготовка будет протягиваться между валками, если проекция действующей на нее силы трения на ось x будет больше проекции на эту ось силы реакции (см. рисунок)



$$F_{mp}\cos\alpha \geq N\sin\alpha$$

или

$$\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$$

(где α - угол между направлениями на точку касания валка и заготовки и на центр второго валка). Очевидно,

$$\frac{d - d_0}{2} = R(1 - \cos\alpha)$$

Выражая косинус через тангенс

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

найдем значения коэффициента трения, при котором заготовка втягивается в пространство между валками

$$\mu \geq \sqrt{\frac{1}{\left(1-\dfrac{d-d_0}{2R}\right)^2}-1}$$

При втягивании заготовки, она начинает деформироваться валками, это приводит к росту силы реакции, но одновременно растет и сила трения, поэтому заготовка будет продолжать втягиваться.

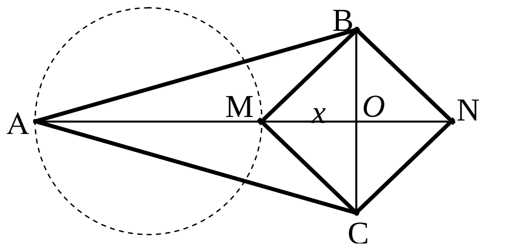
4. Рассмотренный в задаче шарнирный механизм был предложен учеником выдающегося российского математика П.Л.Чебышева Л.Липкиным и французом Ш.Посселье и называется сейчас механизм Липкина-Посселье (или прямило Липкина). Этот механизм позволяет преобразовать вращательное движение в движение по прямой, причем точное и без использования каких-либо направляющих (как в кривошипно-шатунном механизме). Механизм Липкина-Посселье сыграл важную роль в исследовании свойств шарнирных передач, однако в технике особых применений не нашел, поскольку ко времени его открытия были созданы хорошие смазочные материалы, позволяющие делать такое преобразование движения с использованием направляющих (как в кривошипно-шатунном механизме).

Докажем, что точка N движется по прямой. Пусть радиус окружности, по которой движется точка M, равен R, $AB = AC = L$, $MB = MC = l$. Найдем расстояние AN. Если $MO = x$, то

$$AB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2 \qquad \Rightarrow \qquad L^2-(2R+x)^2 = l^2 - x^2$$

Отсюда находим

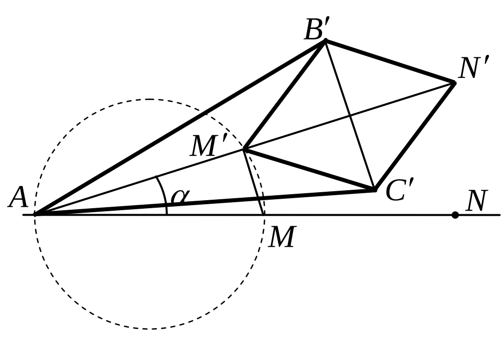
$$x = \frac{L^2-l^2}{4R} - R$$



Поэтому

$$AN = 2R + 2x = \frac{L^2-l^2}{4R} \qquad (1)$$

Когда конструкция из шарнирно соединенных стержней повернется относительно точки A на угол α (см. рисунок), но так, что точка M движется по пунктирной окружности и займет положение M' (см. рисунок), то длину отрезка AN' можно найти с помощью аналогичных формул



$$AN' = \frac{L^2-l^2}{2AM'}$$

Но поскольку угол $AM'M$ - прямой (опирается на диаметр), то $AM' = 2R\cos\alpha$, и, следовательно

$$AN' = \frac{L^2 - l^2}{4R\cos\alpha}$$

Поэтому точка N' шарнирного механизма будет проецироваться в такую точку на прямой AN, которая лежит на расстоянии

$$AN'\cos\alpha = \frac{L^2 - l^2}{4R} \qquad (2)$$

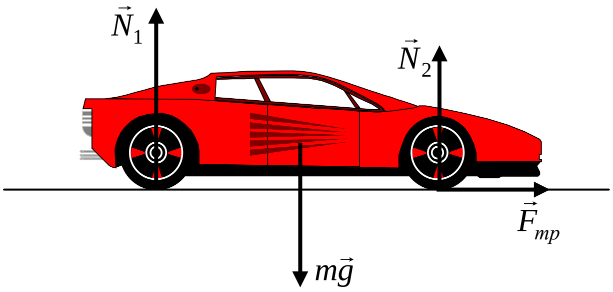
от точки A, т.е. в точку N, как это следует из сравнения (1) и (2). Таким образом, точка N' шарнирного механизма будет двигаться по прямой, перпендикулярной отрезку AN и проходящей через точку N. Другими словами, при вращении всей конструкции ее точка N движется по прямой.

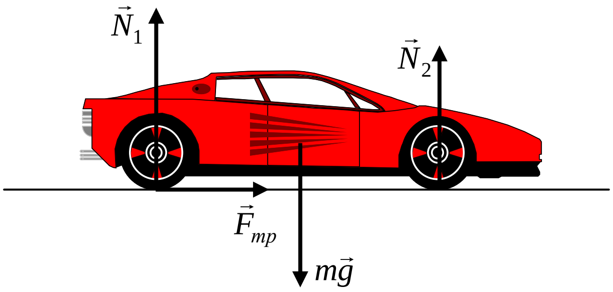
5. Когда ведущие колеса не «пробуксовывают», нижняя точка колеса не скользит по дороге и потому сила трения может не достигать своего максимального значения μN и может быть направлена по-разному. Если автомобиль едет с постоянной скоростью v, колеса вращаются с угловой скоростью v/R (R - радиус колеса) и есть только небольшое трение качения. Если водитель увеличивает угловую скорость вращения колес, колесо в точке касания дороги «хочет» проскользнуть относительно дороги назад, и возникает сила трения, направленная вперед и разгоняющая автомобиль (или, другими словами, автомобиль разгоняется, отталкиваясь от шероховатостей дороги). Если водитель нажимает на педаль газа не очень сильно, проскальзывания не возникает, сила трения не равна максимальному значению. Если водитель тормозит вращение колес, они «хотят» проскользнуть в нижней точке вперед относительно дороги, возникает сила трения, направленная назад. При повороте, благодаря повороту передних колес возникает сила трения, направленная в сторону поворота.

Чтобы сила трения достигла максимального значения, в точках касания колес и дороги должно возникнуть проскальзывание. Это бывает при пробуксовке колес или «заносе», когда автомобиль из-за резкого торможения начинает скользить по дороге. Эта ситуация крайне опасная, поскольку не дает возможность управлять автомобилем. Для управления нужно иметь возможность менять силу трения – именно она позволяет делать маневры на дороге. Более того, при скольжении автомобиля по дороге любая неровность или боковой наклон дороги могут привести к перевороту автомобиля – ведь сила трения направлена назад и равна максимальному значению; и в нашем распоряжении нет силы, способной удержать автомобиль. Поэтому, чтобы управлять автомобилем, нужно иметь «резерв» силы трения, которая должна быть, следовательно, меньше своего максимального значения. Отметим, что любой водитель интуитивно чувствует опасность ситуации с максимальной силой трения и старается не допускать ее возникновения.

Очевидно, что мощность, которую может развивать автомобиль на дороге, зависит не только от его двигателя, но и от того, как автомобиль «использует» силу трения. Действительно, в отсутствие силы трения автомобиль стоял бы на месте (с вращающимися колесами) независимо от мощности двигателя (вращающего эти колеса). Докажем, что заднеприводные автомобили мощнее переднеприводных при одинаковой мощности мотора и оценим отношение мощностей, которые может развивать двигатель, разгоняя машину (при условии, что мощность самого двигателя может быть очень большой).

Разгоняет автомобиль сила трения, действующая на ведущие колеса, а она не может превышать значения μN (N - сила реакции). Поэтому чем больше сила реакции, тем бóльших значений может достигнуть разгоняющая сила трения (а нажатие на педаль газа в ситуации, когда сила трения достигла максимума, приведет только к проскальзыванию и к заносу, но не к увеличению мощности, которую развивает двигатель). Найдем силы реакции для задних и передних колес машины. Силы, действующие на машину при разгоне, показаны на рисунках (на правом – для заднеприводной, на левом – для переднеприводной). На машину действуют: сила тяжести, силы реакции и сила трения. Поскольку машина движется поступательно, сумма моментов всех сил относительно ее центра тяжести равна нулю





Поэтому, если центр тяжести машины находится точно посередине машины, расстояние между задними и передними колесами l, а высота центра тяжести над дорогой h, условие равенства нулю суммы моментов относительно центра тяжести дает (при условии, что машина движется, развивая максимальную мощность на максимуме силы трения)

переднеприводная машина $$N_1\frac{l}{2} = N_2\frac{l}{2} + F_{mp}h = N_2\frac{l}{2} + \mu N_2 h \tag{1}$$

заднеприводная машина $$N_1\frac{l}{2} = N_2\frac{l}{2} + F_{mp}h = N_2\frac{l}{2} + \mu N_1 h \tag{2}$$

где μ - коэффициент трения. Учитывая, что и в том, и в другом случае $N_1 + N_2 = mg$, из (1) найдем силу реакции для передних колес в случае переднеприводного автомобиля

$$N_2^{(nn)} = \frac{mgl/2}{l+\mu h} \tag{3}$$

и из (2) силу реакции задних колес в случае заднего привода

$$N_1^{(зп)} = \frac{mgl/2}{l-\mu h} \tag{3}$$

(здесь (пп) и (зп) – передний и задний привод). Отсюда находим отношение сил трения, разгоняющих передне- и заднеприводную машину и, следовательно, отношение мощностей, которые может развивать на дороге их двигатель

$$\frac{P^{(пп)}}{P^{(зп)}} = \frac{l - \mu h}{l + \mu h} \tag{4}$$

Для значений $l = 3$ м, $h = 0,5$ м и $\mu = 0,5$ имеем из (4)

$$\frac{P^{(пп)}}{P^{(зп)}} = 0,85$$

6. Если бы скорость спутника равнялась первой космической скорости, то второй закон Ньютона дал бы

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$$

и спутник двигался бы по окружности. Когда скорость спутника становится меньше первой космической, спутник начинает совершать два движения: по радиусу к центру Земли с ускорением

$$a = \frac{GM}{R^2} - \frac{(0,99v)^2}{R} \approx 2\cdot 10^{-2}\frac{GM}{R^2} = 2\cdot 10^{-2} g$$

которое практически постоянно из-за небольшого изменения радиуса орбиты, и по касательной к радиусу (орбитальное) с той же - первой космической - скоростью. Поэтому время падения спутника можно оценить как (конечно, при условии отсутствия силы сопротивления воздуха, которая очень сильно изменит движение по сравнению с рассмотренным здесь):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{2\cdot 10^{-2} g}} = 10^3 \text{ сек}$$

Для оценки пройденного спутником расстояния нужно его орбитальную скорость (первую космическую) умножить на время падения. Получим

$$S = vt = 8(\text{км/с})\cdot 10^3(\text{с}) \sim 8000\,(\text{км})$$

Поскольку окружность Земли составляет около 40000 км, то спутник пролетит приблизительно пятую часть окружности.